

## ΑΡΧΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ

Πρώτος που τη χρησιμοποίησε ήταν ο Marrolico (1595)  
Εστω μια πρόταση  $P(n)$  που εξαρτάται από το φυσικό  $n$   
Εστω  $a$  φυσικός σταθερός. Αν τα επόμενα βήματα είναι αληθή:

1)  $P(a)$  αληθές

2) Για κάθε  $k \geq a$ , αν  $n P(k)$  είναι αληθές τότε και  $n P(k+1)$  είναι αληθές

Τότε και  $n P(n)$  θα είναι αληθές όλα τα  $n \geq a$  ή  
 $S = \mathbb{N}$  όπου ορίζουμε ως σύνολο αλήθειας της  $P(k)$

$S = \{ k / k \in \mathbb{N} \text{ και } P(k) \text{ αληθές} \}$ . Δηλ. θέλουμε  $S = \mathbb{N}$

### Π.Χ.1

ΝΔΟ  $1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}, n \geq 1$

### ΛΥΣΗ

Με επαγωγή

• Για  $n=1$   $1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = 1$  Ισχύει άρα  $n P(1)$  αληθές  
ΘΔΟ αν  $P(k)$  αληθές τότε  $P(k+1)$  αληθές

•  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  ενώ  $1 + 2 + \dots + k + k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$   
 $= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k^2 + 2k + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

### Π.Χ.2

ΝΔΟ  $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

### ΛΥΣΗ

• Για  $n=0$  ισχύει  $\sum_{i=0}^0 r^i = \frac{r^{0+1} - 1}{r - 1} \Rightarrow 1 = \frac{r-1}{r-1} = 1$  Ισχύει  
ΘΔΟ αν  $P(k)$  αληθές τότε  $P(k+1)$  αληθές

• Για  $k$ :  $\sum_{i=0}^k r^i = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$

και θα δούμε

• Για  $k+1$ :  $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^k (r^i) + r^{k+1} = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} = \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r - 1} \\ &= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1} \quad \text{Ισχύει!} \end{aligned}$$

Άρα, η Πρόταση  
αληθεύει  $\forall n \geq 0$ .

### Π.Χ.3

ΝΔΟ  $x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \dots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1})$ ,  $n \geq 1$

ΜΕΤ

Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k$  δηλ:

$$x^k - y^k = (x - y) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2} \cdot y + \dots + x \cdot y^{k-2} + y^{k-1})$$

και θα δούμε ισχύει για  $k+1$ .

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x - y) \cdot (x^k + x^{k-1} \cdot y + \dots + y^{k-1} \cdot x + y^k)$$

Προσθαφαιρώ το  $y \cdot x^k$  στο 1<sup>ο</sup> μέλος.

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} - yx^k + yx^k &= x^k(x - y) + y(x^k - y^k) = \\ &= x^k(x - y) + y(x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + x \cdot y^{k-2} + y^{k-1}) = \\ &= (x - y)(x^k + x^{k-1}y + x^{k-2}y^2 + \dots + x \cdot y^{k-1} + y^k) \end{aligned}$$

Ισχύει  $\forall n \geq 1$ .

### Π.Χ.4

ΝΔΟ  $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y) \cdot (x^{2n} - x^{2n-1} \cdot y + \dots + (-1)^{2n-1} \cdot x \cdot y^{2n-1} + (-1)^{2n} \cdot y^{2n})$

ΜΕΤ

Αν αντικαταστήσουμε το  $y$  με  $-y$  έχουμε

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - (-y)^{2n+1} &= (x - (-y)) \cdot (x^{2n} + x^{2n-1} \cdot (-y) + \dots + x \cdot (-y)^{2n-1} + (-y)^{2n}) = \\ &= (x + y) \cdot (x^{2n} - x^{2n-1} \cdot y + \dots + (-1)^{2n-1} \cdot x \cdot y^{2n-1} + y^{2n}) \end{aligned}$$

### Π.Χ. 5

NΔO  $2n+1 < 2^n, n \geq 3$

#### ΛΥΣΗ

- Για  $n=3$  αληθεύει.
- Για  $n=k$  εστω ότι ισχύει για  $n=k+1$  ισχύει.  
 Δηλ.  $2k+1 < 2^k$  ενώ  $2k+2+1 < 2^{k+1} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2k+1+2 < 2^k+2 < 2^k+2^k < 2^{k+1}$  Ισχύει.

### Π.Χ. 6

NΔO  $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$

#### ΛΥΣΗ

• Για  $n=1 \rightarrow \sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1^2$  Ισχύει.

• Υποθέτουμε για  $k$ : όπου  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$

και θάο για  $k+1$ : όπου  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Ισχύει,  $n \geq 1$

### Π.Χ. 7

NΔO  $5 \mid 2^{4n+2} + 1$  για  $n \geq 0$

#### ΛΥΣΗ

$n=0 \rightarrow 2^2 + 1 = 5$  Ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k$ :  $5 \mid 2^{4k+2} + 1$

Θάο για  $k+1$ :  $5 \mid 2^{4(k+1)+2} + 1$

$$\begin{aligned} 2^{4(k+1)+2} + 1 &= 2^{4k+4+2} + 1 = 2^{4k+2} \cdot 2^4 + 1 = \\ &= 2^{4k+2} \cdot 2^4 + 2^4 - 2^4 + 1 = \underbrace{(2^{4k+2} + 1)}_{\text{διαιρ. με } 5} \cdot \underbrace{2^4 - 2^4 + 1}_{\text{διαιρ. με } 5} \end{aligned}$$

$-2^4 + 1 = -16 + 1 = -15$

Άρα,  $5 \mid 2^{4(k+1)+2} + 1$ .

7x8

Να βρείτε όλους τους ακεραίους  $n$  ώστε  $n+1 \mid n^2+1$   
ΛΥΣΗ

$$\left. \begin{array}{l} n+1 \mid n^2+1 \\ n+1 \mid (n+1)^2 \end{array} \right\} n+1 \mid (n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n$$

$$\text{Άρα,} \left\{ \begin{array}{l} n+1 \mid 2n \\ n+1 \mid 2(n+1) \end{array} \right\} n+1 \mid 2(n+1) - 2n = 2$$

$$\text{Άρα,} \quad n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1 = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases} \Rightarrow n = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{cases}$$

### ΑΡΧΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Εστω  $P(n)$  μια πρόταση με  $n$  φυσικό. Εστω  $a$  και  $b$  φυσικοί με  $a \leq b$ . Αν τα ενόθεντα είναι αληθή:

- 1)  $P(a), P(a+1), \dots, P(b)$  είναι αληθή
- 2) Για κάθε  $k > b$ , αν  $\forall i$  αληθής για όλους τους  $i$  με  $a \leq i \leq k$ , τότε και  $\forall P(k)$  αληθής

Τότε  $P(n)$  αληθής  $\forall n \geq a$ .

### Πορίσματα:

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής (Α.Μ.Ε) είναι ειδική περίπτωση της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής (Ι.Μ.Ε)  
 (Το ότι  $IME \Rightarrow AME$  προφανές και ότι σίγουρα  $\Theta\Delta\Theta$   
 $AME \Rightarrow IME$  από βασικές προτάσεις)

## Παράδειγμα

Κάθε φυσικός  $n > 1$  διαιρείται από κάποιο πρώτο αριθμό.

### Απόδειξη

Πρόταση  $P(n)$ : Ο  $n$  διαιρείται από κάποιο πρώτο  
Έστω το σωστό  $S = \{n \mid P(n) \text{ αληθής}\}$  σωστό αληθινά  
Θέλουμε  $S' = \mathbb{N} - \{0, 1\}$

$P(2)$ : ο 2 διαιρείται από κάποιο πρώτο ( $2/2$  αληθής)  
Έστω  $k > 2$  και υποθέτουμε ότι η πρόταση μας  
είναι αληθής για όλα τα  $2 \leq i < k+1$ . ΘΑΔΟ λέγεται για  $k+1$

- Αν  $k+1 = \text{πρώτος}$ , λέγεται.
- Αν  $k+1 \neq \text{πρώτος}$  τότε σώνεται, άρα  $k+1 = a \cdot b$   
με  $a, b \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Τότε  $a < k+1$ . Από την υποθέση  
υπάρχει πρώτος που διαιρεί το  $a$ :  $a = p \cdot \lambda$   
Άρα,  $k+1 = p \cdot \lambda \cdot b$ . Δηλ.  $p \mid k+1$

## Εφαρμογή

ΝΑΔΟ κάθε φυσικός  $n > 0$  γραφεται μοναδικά με βάση το 2

$$n = C_r \cdot 2^r + C_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \dots + C_1 \cdot 2^1 + C_0 \cdot 2^0$$

Όπου  $C_r = 1$  και  $C_{r-1}, C_{r-2}, \dots, C_0 \in \{0, 1\}$

### Λύση

Εξετάζουμε για  $n=1$ ,  $1 = 1 \cdot 2^0$  λέγεται/ΛΑΧ 345 11x9A  
υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για όλους τους  
αριθμούς  $< k+1$ . Δηλ αν  $i < k+1$ , τότε  
 $i = C_r \cdot 2^r + C_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \dots + C_1 \cdot 2^1 + C_0 \cdot 2^0$

• Για  $k+1$ : Αν  $k+1 = \text{Αρτίος} = 2m \Rightarrow \frac{k+1}{2} = m < k+1$  x.π

Άρα, από την ΙΝΕ έχουμε

$$m = C_r \cdot 2^r + C_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \dots + C_1 \cdot 2^1 + C_0$$

για  $C_r = 1$  και  $C_{r-1}, \dots, C_0 \in \{0, 1\}$

$$k+1 = 2m = C_r \cdot 2^{r+1} + C_{r-1} \cdot 2^r + \dots + C_1 \cdot 2^2 + C_0 \cdot 2^1 \quad \text{λέγεται. (5)}$$

Αν  $k+1 = \text{περιττός} = 2m+1 \Rightarrow \frac{(k+1)-1}{2} = m < k+1$

Αρα, από των υποθέσεων

$$m = C'_l \cdot 2^l + C'_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \dots + C'_0 \Rightarrow$$

$$k+1 = 2m+1 = C'_l \cdot 2^{l+1} + C'_{l-1} \cdot 2^l + \dots + C'_0 \cdot 2 + 1$$

Μοναδικότητα ορίσθηκε των εξής προτάσεων

$$q(y) \text{ . Av } y = C_r \cdot 2^r + \dots + C_0 = C'_l \cdot 2^l + \dots + C'_0 \text{ κτ } \Rightarrow$$
$$C_r = C'_l - 1 \text{ και τα υπολοίπα στοιχεία 0 κτ}$$

τότε

$$\Rightarrow r = l \text{ και } C_i = C'_i, i = r, \dots, 0$$

•  $q(1)$  ,  $1 = 1 \cdot 2^0$  βέβαια η μοναδικότητα.

Εστω ότι βέβαια για όλους τους μικρότερους από  $k+1$

$$\text{Εστω } k+1 = C_r \cdot 2^r + C_{r-1} \cdot 2^{r-1} + \dots + C_0 = C'_l \cdot 2^l + \dots + C'_0$$

Av  $k+1 = 2m \Rightarrow$  Για το  $m$  βέβαια ( $m < k+1$ )

$$\frac{k+1}{2} = C_r \cdot 2^{r-1} + C_{r-1} \cdot 2^{r-2} + \dots + C_1 = C'_l \cdot 2^{l-1} + \dots + C'_1$$

Από των υποθέσεων  $r = l$  και  $C_i = C'_i$

ομοία και για  $k+1 = 2m+1$

## ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Εστω  $S \subseteq \mathbb{N}$  . Τότε  $\exists s_0 \in S$  κτ  $s_0 \leq s, \forall s \in S$

Ανταρτί έχει ελάχιστο στοιχείο.

## ΠΧ

Να εξετασθεί εάν βέβαια η ΑΚΑ στα επόμενα αعداد

1)  $S = \mathbb{R}^+$  οχι διότι το 0 infimum αλλά όχι minimum

2)  $S = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n^2 < n\}$  οχι αφού είναι το κενό

3)  $S' = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n = 46 - 7k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$

$46 \in S'$  άρα όχι κενό ,  $|S| = \infty$

$$n \geq 1 \Rightarrow 46 - 7k \geq 1 \Rightarrow k \leq 45/7, k \in \mathbb{Z}$$

$\left[ \frac{45}{7} \right]$  ακεραίο μέρος του  $\frac{45}{7}$  είναι το 6.

Αρα,  $n = 46 - 7 \cdot 6 = 46 - 42 = 4$ .

Το 4 είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $S$   
(γενικά  $[r] \leq r \leq [r] + 1$ )

### ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗΔΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Εστω  $n$  ακεραίοι και  $d \in \mathbb{N}^*$ . Τότε υπάρχουν μοναδικοί ακεραίοι  $q$  και  $r$ , με

$$n = d \cdot q + r \text{ όπου } 0 \leq r < d$$

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εστω το σύνολο  $S = \{ s \in \mathbb{N} \text{ με } s = n - d \cdot k \text{ και } k \in \mathbb{Z} \}$

$S \subseteq \mathbb{N}$ . Αρα, εάν είναι  $\neq \emptyset$  θα έχει ελάχιστο.

Αν  $n \geq 0$ , τότε  $n \in S$

Αν  $n < 0$ , τότε για  $k = n - 1$  έχουμε  $-n \in S$

Αρα,  $S \neq \emptyset$ . Επομένως έχει ελάχιστο (εστω το  $r$ )

Διότι, υπάρχει  $q$  με την ιδιότητα

$r = n - d \cdot q$  και το  $r$  είναι μικρότερο από κάθε άλλο στοιχείο του  $S$ .

Πρέπει  $0 \leq r < d$

Υποθέτουμε ότι  $r \geq d$

$$n - d(q+1) = n - dq - d = r - d \geq 0$$

Αυτό είναι στοιχείο του  $S$  και μικρότερο από αυτόν. Άρα

#### Μοναδικότητα

$$n = q \cdot d + r = q' \cdot d + r' \text{ με } 0 \leq r, r' < d$$

$$|r' - r| = (q - q')d \text{ και } |r' - r| < d \text{ και πόλλο του } d$$

Αδύνατον εμτός αν είναι  $r - r' = 0 = q - q'$